Apellido: .... Nombre: ....

tema **50**

MATEMATICA SUPERIOR –2do Parcial 05/07/2018

1			2		3		4		5		MC	Nota Final
0,5	0,5	1	0.5	1	1	1	1	0,5	1	0,5	1,5	

Ejercicio nº 1: Dada la siguiente ecuación: $4\,e^{-x} + x^2 - 2x - 3 = 0$

a) Obtenga gráficamente cuántas raíces reales tiene, y determine un intervalo de longitud 1 para cada una de ellas.

b) Indique cual debe ser el extremo fijo para calcular la menor raiz por Regula-Falsi. Justifique.

c) Calcule la mayor de sus raíces por el método de Newton-Raphson con un error menor a 10^{-3} utilizando como criterio de paro $|X_{n+1} - X_n|$ siendo X_i las iteraciones sucesivas del método. Tome como valor inicial X_0 el punto inicial del intervalo de dicha raíz.

Ejercicio nº 2: Dada $I = \int_3^5 \frac{\ln(x)}{x}\,dx$

a) Indique, justificando, con cual de los siguientes valores de h se la puede resolver por Trapecios y no por Simpson:

a) h = 0.02   b) h= 0.03   c) h = 0.05   d) h = 0.08

b) Resuélvala por Trapecios, tomando la menor cantidad de subintervalos que aseguren un error menor que 10^{-3} (previamente obtenga esta cantidad, justifique)

Ejercicio nº 3: Dada la matriz de coeficientes de un sistema lineal: $A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

a) Indique si A es diagonalmente dominante. Halle la norma 1 y la norma infinito de A. Justifique.

b) Escriba las formulas iterativas para resolver el sistema por Gauss-Seidel siendo los terminos independientes 4, 9, 1 y 6 respectivamente y reduciendo a la mitad un solo coeficiente para que se pueda garantizar su convergencia. Enuncie dicho teorema.

Ejercicio nº 4: Dada la siguiente tabla de datos:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-1	0	1	4	5	6
$f(x_i)$	3	8	5	8	k	80

a) Halle, si es posible, un valor real de k tal que el polinomio de menor grado que interpola todos los puntos sea de grado 3. Indique de que grado seria el polinomio para el resto de valores de k. Justifique su respuesta.

b) Halle numéricamente un valor aproximado de la derivada primera y la derivada segunda en x=0.

Ejercicio nº 5:

a) Dado el problema de valor inicial: $y(t) + y'(t) = e^{-t}$ con $y(0) = 0$

Halle y(0.6) resolviendo por Runge-Kutta de orden 4 con h=0.6

b) Indique V o F y justifique: "Las fórmulas implícitas pueden usarse como etapas predictoras en los métodos predictor-corrector."

RESPUESTAS

Ej 1) a) dos raices en [0,1] y [2,3]

b) extremo fijo a=0 ya que la derivada primera es negativa y la segunda es positiva en dicho intervalo.

c) Newton Raphson

x	f	deriv
3	0,1991482735	3,8008517265
2,9476043035	0,0030235083	3,6853476218
2,9467838902	7,437238E-07	3,6835345517

Ej 2)

a) Con a) h = 0.02 $\Rightarrow$ n = 100 se puede por los dos métodos

Con b) h= 0.03 $\Rightarrow$ n = 200/3 no se puede con ninguno

Con c) h = 0.05 $\Rightarrow$ n = 40 se puede con los dos

Con d) h = 0.08 $\Rightarrow$ n = 25 se puede solo por Trapecios y no por Simpson

b) Calculamos las derivadas: $f'(x) = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$ $\quad f''(x) = \dfrac{-3 + 2\ln(x)}{x^3}$

MAX | f''(x) | en [3;5] es: | f''(3) | = 0.02973242

Error de Trapecios: $2/12 \bullet h^2 \bullet 0.02973242 < 0.001 \Rightarrow h < 0.44922144$

Se puede tomar n = 5 y h = 0.4 y se obtiene A = h/2 (E + 2 M) = 0,69149361

x	y
3	0,3662041
3,4	0,35993395
3,8	0,35131607
4,2	0,34168679
4,6	0,33175137
5	0,32188758

Ej 3) a) no es diag dom. Normas:

Ej 4) a) k=33 $p(x) = x^3 - 4x^2 + 8$ Para los otros valores de k, seria p(x) de grado 5

b) f'(0) = 1 f''(0) = -8

Ej 5) Por RK 4º orden:

t	y	f		
0	0	1	k1 =	0,6
0,3	0,3	0,44081822	k2 =	0,26449093
0,3	0,13224547	0,60857275	k3 =	0,36514365
0,6	0,36514365	0,18366798	k4 =	0,11020079

0,32824499

tema 50

5-7-18

b) Escriba las fórmulas iterativas para resolver el sistema por Gauss Seidel siendo los términos independientes 4, 9, 1 y 6 respectivamente y reduciendo a la mitad un solo coeficiente para que se pueda garantizar su convergencia. Enuncie dicho teorema.

teorema: Si A es una matriz diagonalmente dominante para cualquier X_0 los métodos de Jacobi o Gauss-Seidel dan sucesión $\{X^k\}_{k=0}^{\infty}$ que converge a la solución de $AX=B$

$$\begin{cases} 8x - 3y + z + 3w = 4 \\ 2x + 7y - 3z + w = 9 \\ 2x + y + 4z = 1 \\ -2x + 3y + z + 6w = 6 \end{cases}$$

$$x^k = \frac{4 + 3y^{k-1} - z^{k-1} - 3w^{k-1}}{8}$$

$$y^k = \frac{9 - 2x^k + 3z^{k-1} - w^{k-1}}{7}$$

$$z^k = \frac{1 - 2x^k - y^k}{4}$$

$$w^k = \frac{6 + 2x^k - 3y^k - z^k}{6}$$

---

(4) Dada la sig. tabla de datos:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-1	0	1	4	5	6
$f(x_i)$	3	8	5	8	k	80

a) Halle, si es posible, un valor real de k tal que el polinomio de menor grado que interpola todos los puntos sea de grado 3. Indique de qué grado sería el polinomio para el resto de valores de k. Justifique su respuesta.

tomo 4 puntos y hallo, si existe, un pol. de grado 3. Luego pruebo si ese polinomio al resto de los puntos y así hallo k.

x_i	$f(x_i)$	$\Delta^i f$		
-1	3			
		$\frac{5}{1} = 5$		
0	8		$-\frac{8}{2} = -4$	
		$\frac{-3}{1} = -3$		$\frac{5}{5} = 1$
1	5		$\frac{4}{4} = 1$	
		$\frac{3}{3} = 1$		
4	8			

$$P(x) = 3 + 5(x+1) - 4\underbrace{(x+1)x}_{x^2+x} + \underbrace{(x+1)x(x-1)}_{x^3-x}$$

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + 8$$

$P(-1) = 3$ ✓ $P(0) = 8$ ✓ $P(1) = 5$ ✓

$P(4) = 8$ ✓ $P(5) = 80$ ✓

verifican todos los puntos

$P(5) = \boxed{k = 33}$ ✓

b) Halle numéricamente un valor aproximado de la derivada primera y la derivada segunda en $x=0$

$h=1$

$$f'(0) = \frac{f(1) - f(-1)}{2h} = \frac{5-3}{2} = \boxed{1 = f'(0)}$$

$$f''(0) = \frac{f(1) - 2f(0) + f(-1)}{h^2} = \frac{5 - 2\times 8 + 3}{1} = \boxed{-8 = f''(0)}$$

⑤ a) Dado el problema de valor inicial $y(t) + y'(t) = e^{-t}$ con $y(0) = 0$
Halle $y(0{,}6)$ resolviendo por RK de 4° orden con $h=0.6$

$$y'(t) = e^{-t} - y(t) \rightarrow f(t,y) = e^{-t} - y$$

$t_0 = 0 \qquad w_0 = 0$

$t_1 = 0{,}6 \qquad w_1 = w_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$$\begin{cases} k_1 = 0{,}6\, f(0,0) = 0{,}6 \cdot 1 = 0{,}6 \\ k_2 = 0{,}6\, f(0{,}3;\, 0{,}3) = 0{,}2644909324 \\ k_3 = 0{,}6\, f(0{,}3;\, 0.1322454662) = 0{,}3651436527 \\ k_4 = 0{,}6\, f(0{,}6;\, 0{,}3651436527) = 0{,}11020079 \end{cases}$$

$$\boxed{w_1 = 0{,}3282461784}$$

b) Indique V o F y justifique: "Las fórmulas implícitas pueden usarse como etapas predictoras en los métodos predictor - corrector"

$\boxed{F}$ las predictoras son explícitas. Las correctoras son implícitas.

tema 50

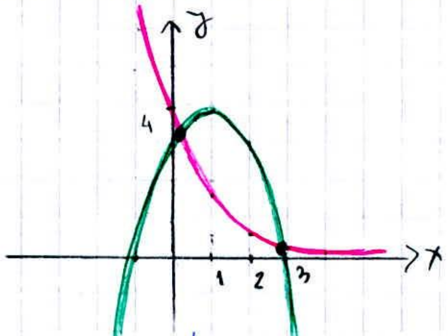
5-7-18

① Dada la siguiente ecuación: $4e^{-x}+x^2-2x-3=0$

a) Obtenga gráficamente cuántas raíces reales tiene, y determine un intervalo de longitud 1 para cada una de ellas.

$4e^{-x} = -x^2+2x+3$

$4e^{-x} = -(x-1)^2+4$



tiene 2 raíces

1 raíz $\in [0;1]$

1 raíz $\in [2;3]$

b) Indique cuál debe ser el extremo fijo para calcular la menor raíz por Regula-Falsi. Justifique.

La menor raíz se encuentra en el intervalo $[0;1]$

$f(x) = 4e^{-x}+x^2-2x-3 \rightarrow f'(x) = -4e^{-x}+2x-2 \rightarrow f''(x) = 4e^{-x}+2$

$$\underbrace{f'(x) < 0 \ \forall x \in [0;1] \qquad f''(x) > 0 \ \forall x \in [0;1]}_{\text{Se fija el } a = 0}$$

c) Calcule la mayor de sus raíces por el método de Newton-Raphson con un error menor a 10^{-3} utilizando como criterio de paro $|x_{n+1}-x_n|$ siendo x_i las iteraciones sucesivas del método, tome como valor inicial x_0 el punto inicial del intervalo de dicha raíz.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

, $x_0 = 2$

$x_1 = 3,685561253$

$x_2 = 3,057084017$

$x_3 = 2,950184962$

$x_4 = 2,946787151$

$\boxed{x_5 = 2,946783688}$ $|x_5 - x_4| = 3,46 \times 10^{-6}$

② Dada $I = \int_3^5 \frac{\ln(x)}{x}\,dx$

a) Indique, justificando, con cuál de los siguientes siguientes valores de h se la puede resolver por trapecios y no por Simpson:

i) $h=0,02$ ii) $h=0,03$ iii) $h=0,05$ iv) $h=0,08$

Para resolver por Simpson se necesita que n sea par.

$nh = b-a \rightarrow n = \frac{2}{h}$

$h=0,02 \rightarrow n=100 \rightarrow$ Por Simpson y trapecios

$h=0,03 \rightarrow n=66,\overline{6} \rightarrow$ Por ninguno de los dos

$h=0,05 \rightarrow n=40 \rightarrow$ Por Simpson y trapecio

$h=0,08 \rightarrow n=25 \rightarrow$ Solo por trapecios (n es impar)

$\boxed{h=0,08}$

b) Resuélvala por trapecios, tomando la menor cantidad de subintervalos que aseguren un error menor que 10^{-3} (previamente obtenga esta cantidad, justifique)

$$E_T = \frac{a-b}{12} h^2 f''(\varphi) \rightarrow |E_T| = \frac{1}{6} h^2 f''(\varphi) < 10^{-3}$$

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} \rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x} x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2} = f'(x)$$

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1-\ln(x)) 2x}{x^4} = \frac{-x - 2x + 2x \ln(x)}{x^4} = \frac{\cancel{x}(2\ln(x) - 3)}{x^{\cancel{4}3}} = \frac{2\ln(x) - 3}{x^3}$$

Para hallar el mayor valor de $f''\varphi$ vuelvo a derivar:

$$f'''(x) = \frac{\frac{2}{x} \cdot x^{3\,2} - (2\ln(x) - 3) 3x^2}{x^6} = \frac{2x^2 - 6x^2 \ln(x) + 9x^2}{x^6} = \frac{x^2(11 - 6\ln(x))}{x^{\cancel{6}4}} = \frac{11 - 6\ln(x)}{x^4} = 0$$

$$\rightarrow 11 = 6\ln(x) \rightarrow \frac{11}{6} = \ln(x) \rightarrow x = e^{11/6} = 6{,}254700952$$

$f''(3) = -0{,}029973$ • $|f''(3)|$ es el máximo

$f''(5) = 0{,}001751$ $\qquad h^2 < \frac{10^{-3} \cdot 6}{0{,}0297324} \rightarrow h^2 < 0{,}201799 \rightarrow h < 0{,}449221$

$f''(e^{11/6}) = 0{,}00272$

$$mh = 2 \rightarrow h < 0{,}449221 \longrightarrow m > 4{,}4521\ldots$$

$$\boxed{m = 5 \longrightarrow h = 0{,}4}$$

i	x_i	$f(x_i) = y_i$
0	3	0,3662041
1	3,4	0,35993395
2	3,8	0,35131607
3	4,2	0,3416868
4	4,6	0,33175137
5	5	0,32188758

$$A_T = \frac{h}{2}\left[y_0 + y_5 + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)\right] =$$

$$= \frac{0{,}4}{2}(0{,}68809168 + 2 \times 1{,}38468819) =$$

$$\boxed{A_T = 0{,}691493612}$$

---

3) Dada la matriz de coeficientes de un sistema lineal:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Indique si A es diagonalmente dominante. Halle la norma 1 y la norma infinito de A. Justifique

No es matriz diagonalmente dominante. En la fila 2 tenemos que $7 < |4| + |-3| + |1|$

$\|A\|_1 = 16$ $\qquad \|A\|_\infty = 15$